TEORÍA DE HILOS FLEXIBLES. APLICACIÓN A LAS CATENARIAS

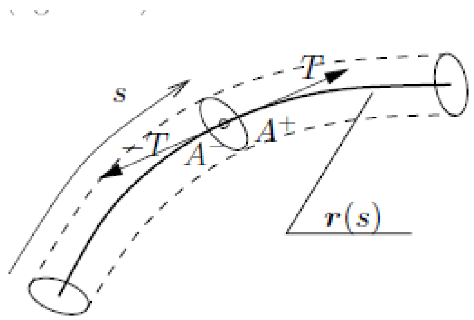
1. INTRODUCCION

La flexibilidad de los hilos hace que su estudio difiera en cierto modo de los sistemas discretos considerados hasta ahora en el curso de Mecánica. Uno de los **objetivos principales del estudio de los hilos será determinar la configuración que adoptan**, a priori desconocida. Sin embargo, resulta apropiado su estudio en el ámbito de la mecánica de sistemas rígidos ya que comparten una propiedad esencial: las fuerzas internas (las que no permiten la extensión del cable) no desarrollan ningún trabajo. En este aspecto crucial se diferencian de los sistemas deformables y estructurales, en los que se produce una energía de deformación interna bajo carga.

Las características que definen los hilos flexibles e inextensibles y se admiten como hipótesis de partida son las siguientes:
1. **Sección despreciable.** Se considera que el hilo posee una dimensión predominante, mucho mayor que los otros dos, por lo que puede ser idealizado según una línea, sin sección transversal. Tan sólo será necesario considerar esta sección a efecto de calcular su peso específico o peso propio por unidad de longitud, **q**, en función de la sección transversal y su densidad (si la sección es circular, la longitud es superior al radio)
2. **Flexibilidad perfecta.** El hilo no resiste esfuerzos de flexión, y por lo tanto tampoco de corte. Tan sólo resiste esfuerzos en dirección tangencial o longitudinal.
3. **Inextensibilidad**. Cuando está sometido a tracción, el hilo es lo suficientemente rígido (en dirección longitudinal) como para que se pueda despreciar su extensibilidad. Por el contrario, sometido a compresión, el hilo no ofrece resistencia y se arruga.

Estas hipótesis son por supuesto una idealización que conforma el modelo de hilos flexibles inextensibles al que se ciñe este capítulo. En circunstancias reales, los cables o cuerdas no cumplen exactamente ninguna de las hipótesis anteriores; sin embargo, en numerosos casos prácticos es suficientemente válida esta idealización.

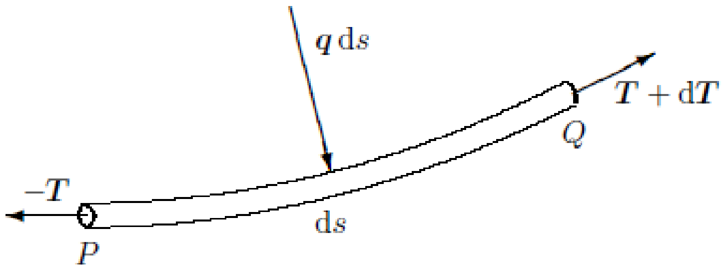
2. ECUACIÓN VECTORIAL DEL EQUILIBRIO



El hilo queda definido por **su curva directriz, r(s)**, que supondremos parametrizada en función de la **longitud de arco s** de la misma. En un punto dado del hilo definido por s podremos considerar una sección normal **A**, en la cual definimos como cara frontal A+ la que está orientada en sentido de s creciente, y cara dorsal A− la orientada en sentido de s decreciente.

Si se considera el hilo cortado por esta sección (ver figura), la parte que queda por detrás queda limitada por la sección frontal A+, en la que el efecto del hilo por delante que se ha eliminado puede sustituirse por una fuerza **T** que se denomina **tensión**. Si por el contrario se considera la parte del hilo por delante, queda limitado por la sección dorsal A−, sobre la que el resto del hilo produce una fuerza −T, de forma que esté en equilibrio con T. En principio T podría llevar cualquier dirección, aunque como veremos más abajo su dirección será tangente al propio hilo. Por otra parte, debe ser siempre T > 0 de forma que corresponda a una tracción, T < 0 correspondería a un esfuerzo de compresión que no puede ser resistido.

Consideremos ahora un elemento PQ del hilo (ver figura), de longitud infinitesimal ds. El punto P corresponde a s y el punto Q a (s + ds). La sección en P será dorsal y la sección en Q frontal. Sobre el hilo actúa una **carga continua q por unidad de longitud**. Al cortar el elemento de hilo por los puntos P y Q, el equilibrio del mismo queda garantizado por la tensión del hilo en cada extremo.



En primer lugar, **establecemos el equilibrio de fuerzas** sobre este elemento de hilo.

Las fuerzas que actúan sobre el mismo son:
Tensión en P: (−T)
Tensión en Q: (T + dT)
Cargas externas: (qds)

Expresando vectorialmente dicho equilibrio, la resultante de las fuerzas aplicadas deber ser nula. Por tanto:

$$-\mathbf{T} + (\mathbf{T} + \mathrm{d}\mathbf{T}) + \mathbf{q}\mathrm{d}s = 0$$

de donde resulta la **ecuación vectorial del equilibrio**:

$$\boxed{\mathrm{dT} + \mathrm{q}\mathrm{d}s = 0}$$

$$\boxed{(\mathrm{dT}/\mathrm{d}s) + \mathrm{q} = 0}$$

d**r** = ds **t≈PQ,** siendo **t** el vector unitario tangente al hilo

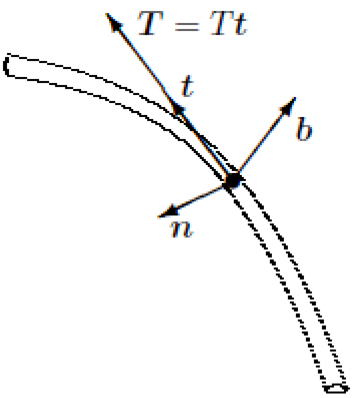
Para completar las condiciones de equilibrio, expresamos la anulación de los momentos en Q (en estática, recordamos que también la suma vectorial de momentos debe ser cero).

$$\boxed{(-\mathrm{d}\mathbf{r}) \wedge (-\mathbf{T}) - \xi \mathrm{d}\mathbf{r} \wedge \mathbf{q}\mathrm{d}s = \mathbf{0}}$$

donde hemos supuesto que la resultante de cargas exteriores (**q**ds) actúa en un punto intermedio del elemento, definido por (−ξd**r**) desde Q, siendo ξ∈(0,1). Prescindiendo de infinitésimos de 2º orden, resulta

$$\boxed{\mathrm{d}\mathbf{r} \wedge \mathbf{T} = \mathbf{0}}$$

De aquí se deduce que la tensión ha de ser tangente al hilo



Expresemos ahora la **ecuación del equilibrio** en función de sus componentes en el triedro de Frenet. La denominada fórmula de Frenet permite expresar la derivada de la tangente como:

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \frac{n}{R},$$

,
siendo **n** la normal principal y R el radio de curvatura.

La tensión lleva la dirección de la tangente, quedando definida por un escalar T de forma que **T**= T**t** (recordamos que **t** es el vector unitario tangente, indicado en la figura)

Sustituyendo en la ecuación del equilibrio:

$$\frac{\mathrm{d}(T\boldsymbol{t})}{\mathrm{d}s} + \boldsymbol{q} = \boldsymbol{0}$$
$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{t} + T\frac{\boldsymbol{n}}{R} + \boldsymbol{q} = \boldsymbol{0}$$

Podemos extraer de esta última expresión las componentes según las direcciones del triedro.

Denominando (q_t, q_n, q_b) las componentes de q según cada una de las direcciones tangente, normal y binormal:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s} + q_t = 0 & \text{(dirección tangente)} \\[2ex] \dfrac{T}{R} + q_n = 0 & \text{(dirección normal)} \\[2ex] q_b = 0 & \text{(dirección binormal)} \end{cases}$$

Observaciones:

- La componente q_b según la binormal es nula. Esto quiere decir que el hilo adopta una configuración que contiene a la fuerza q en su plano osculador, definido por los vectores (**t**,**n**).
- Si no existe componente tangencial de la fuerza aplicada (q_t = 0), la tensión del hilo se mantiene constante.
- Si además la fuerza normal (q_n) es constante, el radio de curvatura adoptado será también constante, resultando una circunferencia como configuración de equilibrio del hilo.

3. ECUACIONES EN COORDENADAS CARTESIANAS

Definimos los vectores siguientes:

$$\boldsymbol{r} \equiv (x, y, z)$$
$$\boldsymbol{q} \equiv (q_x, q_y, q_z)$$
$$\boldsymbol{t} \equiv \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\right)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(T\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right) + q_x & = 0 \\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(T\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\right) + q_y & = 0 \\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(T\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\right) + q_z & = 0 \end{cases}$$

Considerando que la tensión se puede expresar como **T** = T**t**, las ecuaciones de equilibrio se pueden escribir ahora como tres ecuaciones escalares (las que se muestran a la izquierda del texto)..

4. CASOS DE FUERZAS CONSERVATIVAS

Supongamos que *q*, fuerza aplicada por unidad de longitud del hilo, se puede obtener de un potencial *V*:

$$\mathbf{q} = -\mathrm{grad}(V); \quad dV = -\mathbf{q} \cdot d\mathbf{r}$$

Puesto que **q** es una fuerza por unidad de longitud, V tiene la dimensión de energía por unidad de longitud, es decir de fuerza.

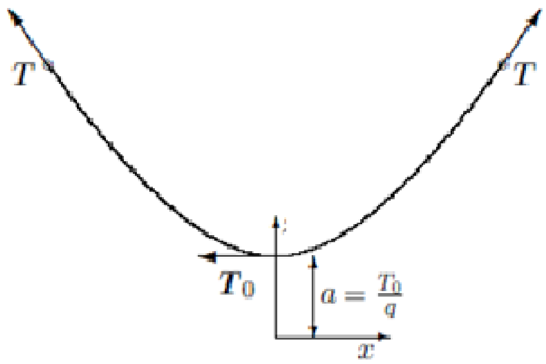
Proyectemos la ecuación vectorial (dT/ds) + q=0 en la dirección tangente:

$$d\mathbf{T} \cdot \mathbf{t} + \mathbf{q}ds \cdot \mathbf{t} = 0 \quad \rightarrow \quad dT + q \cdot dr = 0; \rightarrow \quad dT - dV = 0 \rightarrow \quad dT = dV$$

T = V + h , siendo h es una constante de integración arbitraria.

Esta expresión es de gran utilidad práctica, puesto que permite de forma muy sencilla obtener la tensión en cada punto del hilo.

5. EJEMPLO: HILO HOMOGÉNENO SOMETIDO A SU PROPIO PESO EN UN CAMPO GRAVITATORIO SIMPLIFICADO. CATENARIA



Sea el peso de valor q por unidad de longitud del hilo (ver figura). El potencial gravitatorio es:

$$V = qy,$$

siendo "y" el eje vertical por lo que aplicando la expresión T = V + h obtenemos la tensión en cada punto del hilo como: T = qy + h

En la práctica conviene elegir un origen de coordenadas de forma que se anule la constante arbitraria h. Esto se consigue situando el origen a una distancia $a = T_0/q$ por debajo del vértice o punto más bajo de la curva de equilibrio, siendo T_0 la tensión del hilo en dicho vértice. Así resulta:

T = qy es la tensión total del hilo

T_0=qa es la tensión horizontal

a es el parámetro de la catenaria.

Denominamos las componentes vertical y horizontal de la tensión T_V y T_H respectivamente

Si el peso del hilo por unidad de longitud es q, el campo de fuerzas será $\mathbf{q} = -q\mathbf{j}$, por lo que:
$dT_V = q\,ds$
integrando:

$$\boxed{T_V = qs; \; T_H = T_0 \text{ (cte)}}$$

donde se ha elegido como origen de arcos (s = 0) el vértice o punto más bajo de la curva, con tangente horizontal ($T_V = 0$).

La tensión total es : $\boxed{T = qy}$

que se puede escribir como:

$$\boxed{T = q \quad = \sqrt{T_V^2 + T_H^2}}$$

El origen de coordenadas se ha elegido a una distancia a por debajo del vértice de la curva, de forma que la tensión más baja, en el punto de tangente horizontal, vale

$$\boxed{T_0 = qa}$$

De las expresiones anteriores se deduce la relación

.

$$\boxed{y^2 = s^2 + a^2}$$

Esta condición es una propiedad que cumple la curva de equilibrio del hilo, denominada catenaria.

La determinación precisa de la ecuación de la catenaria se realiza a continuación

Como ya hemos dicho se denomina CATENARIA a la curva de equilibrio que adopta un hilo uniforme sometido a su propio peso.

Supongamos que éste vale q por unidad de longitud, es decir:
q = −q**j**.

Tomando el eje y como vertical y el eje x horizontal, las ecuaciones cartesianas del equilibrio con Fx = 0 y F_Y = −q son:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(T\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right) = 0; \\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(T\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\right) - q = 0. \end{cases}$$

De la primera ecuación:

$$\underbrace{T\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}}_{T_x} = \mathrm{cte} \quad \Rightarrow \quad \boxed{T_x = T_0 = \mathrm{cte}}.$$

Aplicando la regla de la cadena a la segunda ecuación:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[T\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right] - q = 0,$$

en función de T_0

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(T_0\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) - q = 0.$$

Reorganizando términos y aplicando de nuevo la regla de la cadena,

$$\frac{T_0}{q}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = 1.$$

Llamando a = T_0/q (parámetro de la catenaria) y y' = dy/dx, y considerando

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+(y')^2}},$$

la ecuación se convierte en la siguiente:

$$a\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y'}{\sqrt{1+(y')^2}} = 1$$

La primitiva de esta expresión es: a senh^{-1}(y'). Integrando con la condición inicial que corresponde a situar el origen de abscisas en el vértice o punto de tangente horizontal,

$$y'\Big|_{x=0} = 0$$

se obtiene:

$$x = a\,\mathrm{senh}^{-1}y' \qquad y' = \mathrm{senh}\,\frac{x}{a}.$$

.

e integrando de nuevo con la condición inicial (y(x=0)=a), resulta finalmente:

$$\boxed{y = a\cosh\frac{x}{a}} \qquad \boxed{T = qa\cosh\frac{x}{a}}$$

Obtengamos ahora la longitud del arco de la catenaria entre dos puntos dados. Para ello, integramos el elemento infinitesimal de arco ds :

$$ds^2=dx^2+dy^2=dx^2(1+y'^2)=dx^2(1+\mathrm{senh}^2(x/a))= dx^2\cosh^2(x/a)$$

Por tanto, el arco s medido entre el vértice (x = 0) y un punto cualquiera de abscisa x es:

$$\boxed{s = \int_0^x \mathrm{d}s = \int_0^x \cosh\frac{\xi}{a}\mathrm{d}\xi = a\ \mathrm{senh}\,\frac{x}{a}.}$$

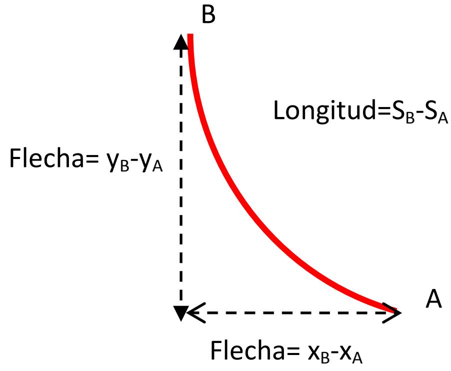
$$\boxed{\begin{aligned} T_V &= qs = qa\,\mathrm{senh}\,\frac{x}{a},\\ T_H &= T_0 = qa.\end{aligned}}$$

MUY IMPORTANTE, muchas veces en los problemas de HILOS, las fuerzas se operan en kg si el peso unitario q viene expresado en kg/m.

6. CONFIGURACIÓN DE EQUILIBRIO DEL HILO

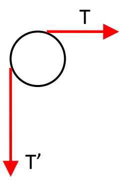
Hay que dar el parámetro de la catenaria, a, la luz, y la flecha

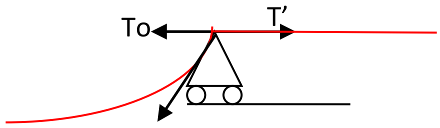
FIGURA BÁSICA



7. TIPOS DE APOYOS QUE APARECEN EN LOS PROBLEMAS DE HILOS

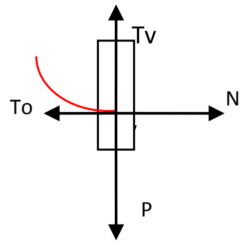
POLEA: Iguala tensiones totales



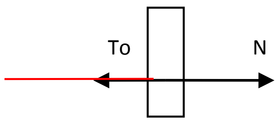


CARRITO: Iguala tensiones horizontales

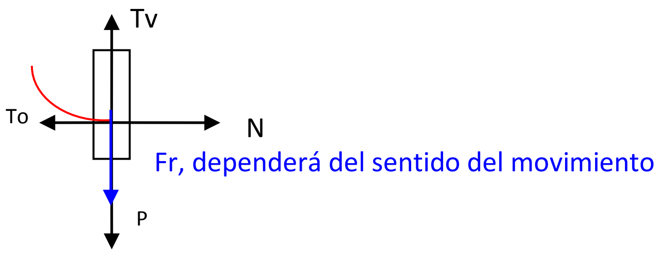
Deslizadera lisa con peso



Deslizadera lisa sin peso



Deslizadera rugosa con peso



8. PÉRDIDA DEL EQUILIBRIO

Los cuerpos pueden perder el equilibrio de varias formas:

- Deslizando ($\sum \vec{F} = \vec{0}$)
- Volcando ($\sum \vec{M} = \vec{0}$)

- El bloque puede deslizar y volcar (Equilibrio estricto) $\sum \vec{F} = \vec{0}$ y $\sum \vec{M} = \vec{0}$